

## **RELATÓRIO FINAL – IFSP**

### **MÓDULO DE PROGRAMA PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE LAJES RETANGULARES SIMPLEMENTE APOIADAS PELO MÉTODO DE NAVIER.**

Guilherme Dos Santos Silva, (17) 99268-5359,  
guilherme\_cajobi@outlook.com.br.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo-IFSP  
Rua Pedro Vicente, 625 – Canindé – São Paulo – SP  
CEP: 01109-010  
Telefone: 11-3775-4570  
e-mail: prp@ifsp.edu.br

Gustavo Cabrelli Nirschl, (17) 99153-2885,  
nirschl@gmail.com.

#### **RESUMO**

Atualmente existem inúmeros programas de computador que realizam cálculos para problemas enfrentados há tempos por engenheiros, mas a sua maioria mostra somente os resultados finais. Tendo em vista tal problemática, existe um programa do grupo de pesquisa NEVE (IFSP Votuporanga), criado nas linguagens *web* (HTML/JavaScript), com um ambiente gráfico que permite desenhar elementos relacionados a lajes, chamado IFESTRUT-LAJES. Apresenta-se neste relatório um módulo que implementou ao IFESTRUT-LAJES a análise estrutural de lajes simplesmente apoiadas pelo método de Navier. O módulo não só realiza cálculos, mas exibe todos os procedimentos de cálculos em relatórios gerados no formato pdf (*portable document format*), que podem auxiliar professores e alunos.

### ***Introdução***

Com avanço do meio tecnológico, surgem possibilidades de se utilizar métodos que antes eram trabalhosos, mas agora são viáveis por meio de cálculos computacionais. No âmbito da Engenharia Civil, esses métodos são utilizados para resolução de problemas já enfrentados há milênios pela humanidade. Tais problemas são variados, desde dimensionamentos de estruturas até projetos hidráulicos e elétricos.

Nesse sentido, existem inúmeros programas de computador que realizam cálculos para problemas enfrentados há tempos por engenheiros, entretanto, a maioria desses programas mostram somente os resultados finais ou alguns passos. Dessa forma, o grupo de pesquisa NEVE (Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental), já cadastrado no CNPq, tem desenvolvido programas que não só fazem cálculos, mas que demonstram todo o procedimento realizado em relatórios gerados no formato pdf que podem auxiliar professores e alunos.

No ano de 2020, Silva e Nirschl (2020) e Fernandes e Nirschl (2020) criaram o software chamado IFESTRUT-LAJES, o qual permite desenhar elementos relacionados a lajes. Tal software foi construído com o objetivo de servir como uma base gráfica para que futuros módulos implementassem cálculos para análise estrutural de lajes.

Dessa forma, por meio das linguagens de programação *web* (HTML/JavaScript), teve-se a ideia de criar um módulo de análise estrutural de lajes pelo método de Navier para um ambiente gráfico IFESTRUT-LAJES.

O Método de Navier se trata de uma solução analítica para a Equação de Lagrange, uma equação diferencial que, segundo Dias (2019, p. 11): “descreve o comportamento físico de uma placa”, desde que se tenha as condições de contorno pré-estabelecidas. De acordo com Szilard (2004), para lajes com espessuras muito menores que as outras dimensões, chamadas de lajes delgadas, podemos considerá-las como bidimensionais em um sistema de coordenadas (x,y).

Desse modo, com as Teorias da Elasticidade e de Kirchhoff, o equilíbrio de um elemento infinitesimal conforme, na Figura 1, resulta nas seguintes

relações diferenciais de esforços internos: momentos fletores (1) e (2); momento torçor (3); forças de cisalhamento transversais (4) e (5) (SZILARD, 2004). A partir dessas relações, classicamente se desenvolve a Equação de Lagrange, mostrada, por exemplo, em Dias (2019), em coordenadas cartesianas (6).

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (1)$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (2)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (3)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (4)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (5)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (6)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (7)$$

Em que:

$w \rightarrow$  função do deslocamento transversal da placa;

$D \rightarrow$  rigidez da placa, equação (7);

$E \rightarrow$  módulo de elasticidade;

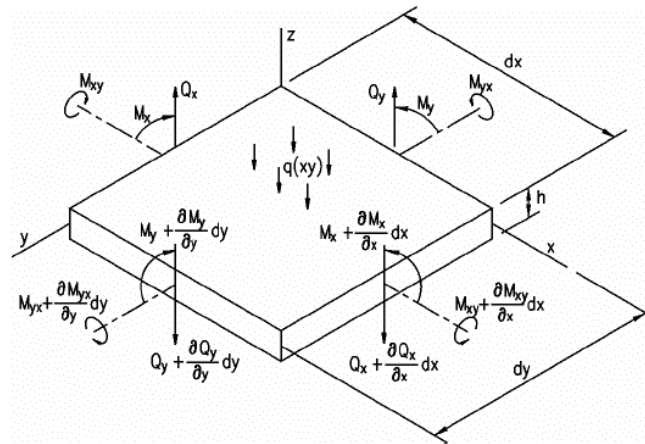
$t \rightarrow$  espessura da placa;

$\nu \rightarrow$  coeficiente de Poisson;

$p(x, y) \rightarrow$  função da carga sobre a placa.

$m, n \rightarrow$  números inteiros.

Figura 1: Equilíbrio de possíveis ações.



Fonte: Soares, 2004.

Com isso, o Método de Navier, também chamado de solução forçada, transforma a equação diferencial em uma equação algébrica de modo a facilitar o processo de solução. Navier, em 1820, apresenta a solução (8), conforme Timoshenko (1953, p. 121), para a deflexão de placas retangulares simplesmente apoiadas nos contornos e, similarmente, a equação (9) para a carga sobre a laje. Ambas as funções são séries duplas trigonométricas e obedecem às condições de contorno, deslocamentos e momentos fletores nulos nos bordos, de modo que os senos são nulos quando  $x$  ou  $y$  assumem o valor 0 ou respectivamente,  $a$  (dimensão da laje paralela a  $x$ ) e  $b$  (dimensão da laje paralela a  $y$ ) (SZILARD, 2004).

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (8)$$

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (9)$$

Substituindo (8) e (9) em (6) temos (10):

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (10)$$

Desse modo, substituindo (10) em (8), obtemos a função de deflexão genérica para lajes retangulares simplesmente apoiadas:

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (11)$$

Onde  $p_{mn}$  (12) é um coeficiente referente à carga:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (12)$$

A fim de se obter o deslocamento de uma laje simplesmente apoiada sujeita a uma carga distribuída uniformemente  $p(x, y) = q_o$ , Soares (2004), após obter o coeficiente  $p_{mn} = \frac{16q_o}{\pi^2 mn}$ , apresenta a equação (13), bem como, considerando sua dedução para o  $p_{mn}$  de uma carga pontual  $P$ , apresenta o deslocamento (14). Para a equação (13), tem-se que a variação de  $m, n = 1, 3, 5 \dots \infty$ , já para equação (14),  $m$  e  $n$  varia em números inteiros (1, 2, 3... $\infty$ ).

$$w(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (13)$$

$$w(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 Dab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (14)$$

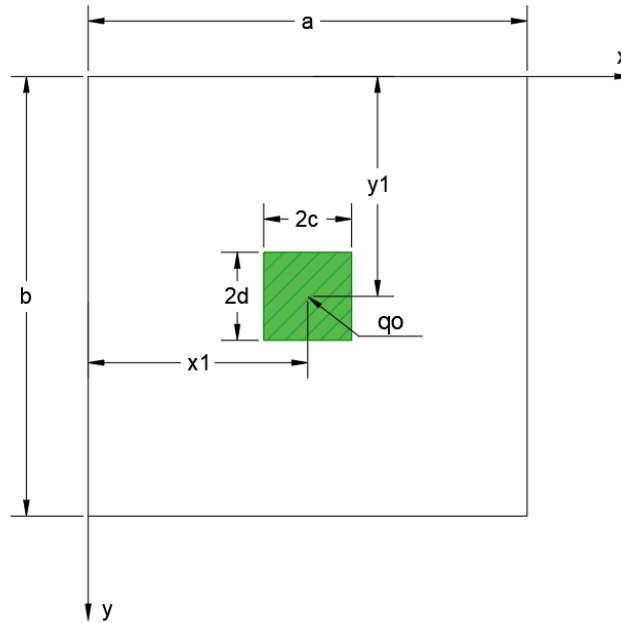
Para uma carga  $q_o$  sobre uma região retangular  $2c * 2d$  na planta da laje, com seu centro na posição  $x_1, y_1$  (vide Figura 2), Soares (2004) apenas apresenta que  $p(x, y) = \frac{P}{4cd}$  e o coeficiente de carga  $p_{mn}$  (15), o qual foi utilizado no intuito de desenvolver a função do deslocamento em (21), apresentada no item DESENVOLVIMENTO (METODOLOGIA E ANÁLISE). Será também considerado neste trabalho uma superposição de ações dada pelo trem-tipo TB450 da NBR 7188 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2013), conforme Figura 3.

$$p_{mn} = \frac{4P}{a \cdot b} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\frac{m\pi c}{a} \frac{n\pi d}{b}} \quad (15)$$

Em que:

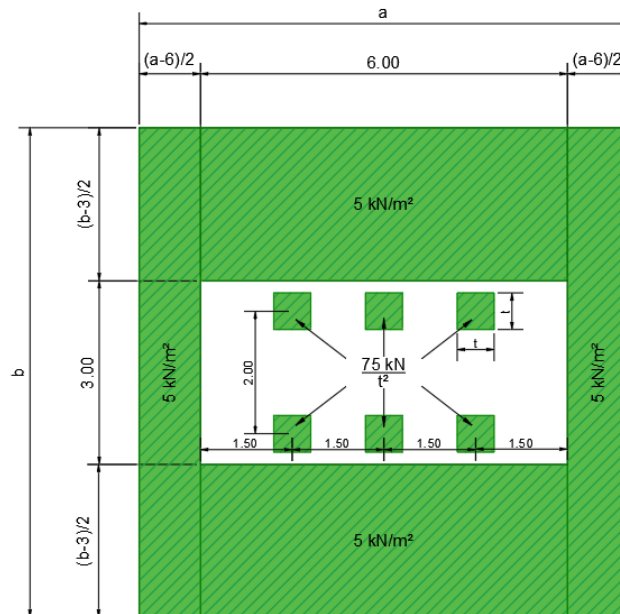
$$P = 4q_o \cdot c \cdot d.$$

Figura 2: Carga sobre região retangular.



Fonte: O próprio autor (2021)

Figura 3: Conjunto de Cargas Trem-Tipo TB450.



Fonte: O próprio autor (2021)

Portanto, com o módulo apresentado nesse trabalho, foram implementados os seguintes itens no IFESTRUT-LAJES: a análise estrutural de lajes retangulares com bordas simplesmente apoiadas sujeitas a carga distribuída em toda laje, distribuída em uma região e concentrada (além de suas superposições) e a geração do relatório detalhado com os passos de resolução.

**Justificativa:**

Com avanço tecnológico, as páginas de internet têm sido mais utilizadas por professores e alunos, seja para apreender ou se aprofundarem em novos conhecimentos. Nesse sentido, o módulo implementado no IFESTRUT-LAJES, permite a geração do relatório com os passos de resolução, pelo método de Navier, de lajes simplesmente apoiadas sujeita a carga distribuída em toda laje, distribuída em uma região e concentrada (além de suas superposições). Tendo em vista tais funcionalidades, o módulo poderá ser utilizado tanto por alunos como material de estudo quanto professores como elemento auxiliador na metodologia de ensino.

### **Objetivo:**

Criação de um módulo de programa que calcule deslocamentos e esforços, pela solução de Navier, de lajes retangulares simplesmente apoiadas sujeitas a carga distribuída em toda a laje, distribuída em uma região retangular ou concentrada, bem como viabilize um relatório no formato pdf (portable document format) com todos os procedimentos de cálculos.

### **DESENVOLVIMENTO (METODOLOGIA E ANÁLISE)**

O IFESTRUT-LAJES, juntamente com o módulo aqui apresentado, permite a geração de três tipos de cargas (sobre toda a laje, sobre região e pontual), de modo que as funções de deslocamento gerado por uma carga sobre toda a laje e pontual foram apresentadas por Soares (2004), conforme visto no item INTRODUÇÃO. Com isso, foi necessário desenvolver a função do deslocamento gerado por uma carga sobre região (21), a qual foi deduzida por meio da implementação do coeficiente  $p_{mn}$  (15) de sua carga na função genérica do deslocamento para lajes apoiadas nos 4 lados (11), ambas apresentadas em Soares (2004). Com as funções de deslocamentos para os três tipos de carga presentes no IFESTRUT-LAJES (sobre toda a laje, sobre região e pontual), foram utilizadas as relações: (1), (2) e (3) para se descobrir as funções algébricas dos momentos; (4) e (5) para as funções algébricas das cortantes.

Vale salientar que todas as funções apresentadas neste relatório, a fim de comprovar suas veracidades, foram comparadas algebricamente pelo MathCad Prime 7 (PTC, 2021).

Dessa forma, as funções implementadas computacionalmente no IFESTRUT-LAJES a fim de criar os diagramas da carga uniforme sobre toda a laje podem ser visualizadas abaixo. Sendo: a função (13) referente ao deslocamento; (16) e (17) os momentos na duas direções, respectivamente, x e y; (18) o momento torçor; (19) e (20) as cortantes na duas direções, respectivamente, x e y.

$$M_x(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \nu \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (16)$$

$$M_y(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \nu \left( \frac{m}{a} \right)^2 \right]}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (17)$$

$$M_{xy}(x, y) = -\frac{16q_o(1-\nu)}{\pi^4 ab} \sum_m \sum_n \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (18)$$

$$Q_x(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^3 a} \sum_m \sum_n \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{n \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]} \quad (19)$$

$$Q_y(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^3 b} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]} \quad (20)$$

Para a criação dos diagramas da carga sobre região, temos as funções (21), (22), (23), (24), (25) e (26). Sendo: a função (21) referente ao deslocamento; (22) e (23) os momentos fletores na duas direções, respectivamente x e y; (24) o momento torçor; (25) e (26) as cortantes na duas direções, respectivamente x e y.

$$w(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi c}{a} \text{sen} \frac{n\pi d}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (21)$$



$$M_x(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi c}{a} \text{sen} \frac{n\pi d}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + v \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (22)$$

$$M_y(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi c}{a} \text{sen} \frac{n\pi d}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + v \left( \frac{m}{a} \right)^2 \right]}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (23)$$

$$M_{xy}(x, y) = -\frac{16q_o(1-v)}{\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi c}{a} \text{sen} \frac{n\pi d}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (24)$$

$$Q_x(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^3 a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi c}{a} \text{sen} \frac{n\pi d}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{n \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]} \quad (25)$$

$$Q_y(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^3 b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi c}{a} \text{sen} \frac{n\pi d}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]} \quad (26)$$

Por fim, para a carga concentrada, as funções algébricas responsáveis pela criação dos diagramas são: (14) referente ao deslocamento; (27) e (28) os momentos fletores na duas direções, respectivamente x e y; (29) o momento torçor; (30) e (31) as cortantes na duas direções, respectivamente x e y.

$$M_x(x, y) = \frac{4P}{\pi^2 ab} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + v \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (27)$$

$$M_y(x, y) = \frac{4P}{\pi^2 ab} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + v \left( \frac{m}{a} \right)^2 \right]}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (28)$$

$$M_{xy}(x, y) = -\frac{4P(1-v)}{(\pi ab)^2} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} mn}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (29)$$

$$Q_x(x, y) = \frac{4P}{\pi a^2 b} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} m}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]} \quad (30)$$

$$Qy(x, y) = \frac{4P}{\pi ab^2} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]} \quad (31)$$

Na Figura 4, pode ser observado o IFESTRUT-LAJES, o ambiente gráfico responsável pelo desenho de elementos relacionados a laje, o qual está disposto em uma página de internet e pode ser acessado por meio do link: <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/Ifestrut-lajes/ifestrut-lajes.html>. Com isso, percebe-se que o IFESTRUT-LAJES serve como uma base gráfica para módulos de cálculos de análise estrutural.

Desse modo, por meio da linguagem HTML, o módulo apresentado nesse relatório foi implementado na aba Funções (ver Figura 4). Tal opção foi desenvolvida por meio da linguagem Javascript, para que, quando acionada, crie a interface de análise estrutural de acordo com a solução de Navier. Com isso, na interface, por meio do HTML, foi criado o elemento canvas (contornado em azul) que é a tela gráfica, responsável pelo desenho dos diagramas.

Depois, criou-se o menu principal (contornado em verde na Figura 4), o qual o permite ao usuário: escolher qual diagrama ele pretende analisar, acesso a criação dos relatórios, acesso a tabela contendo os resultados nos pontos.

Além disso, estipularam-se três parâmetros (contornados em laranja na Figura 4) para configurar os cálculos computacionais. O primeiro parâmetro define o espaçamento dos pontos, bem como o quadrado de influência de cada ponto. Por exemplo, caso seu valor seja 1 m cada ponto será representado por um quadrado de dimensões de 1x1 m e espaçado a 1 m dos pontos em torno. Já o segundo e terceiro parâmetros são utilizados para determinar o critério de parada das funções de Navier.

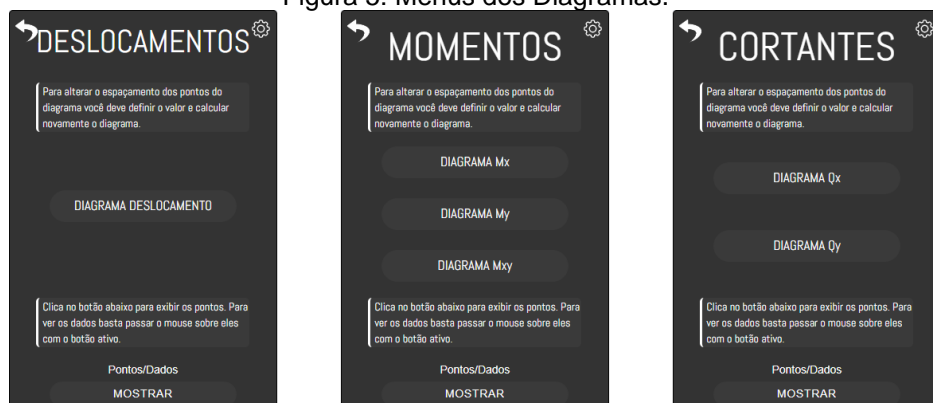
Na Figura 5, podem ser observados os menus referentes aos esforços e deslocamento, que aparecem após o clique nos botões do quadro verde da Figura 4, os quais apresentam as seguintes ferramentas: botão de desenhar o diagrama, botão com formato de seta no canto superior esquerdo que possibilita o usuário a retornar no menu principal, botão no canto superior direito o qual define o intervalo dos valores do diagrama, botão “MOSTRAR” que exibe no diagrama os valores de cada ponto.

Figura 4: Tela principal do módulo.



Fonte: O próprio autor (2021).

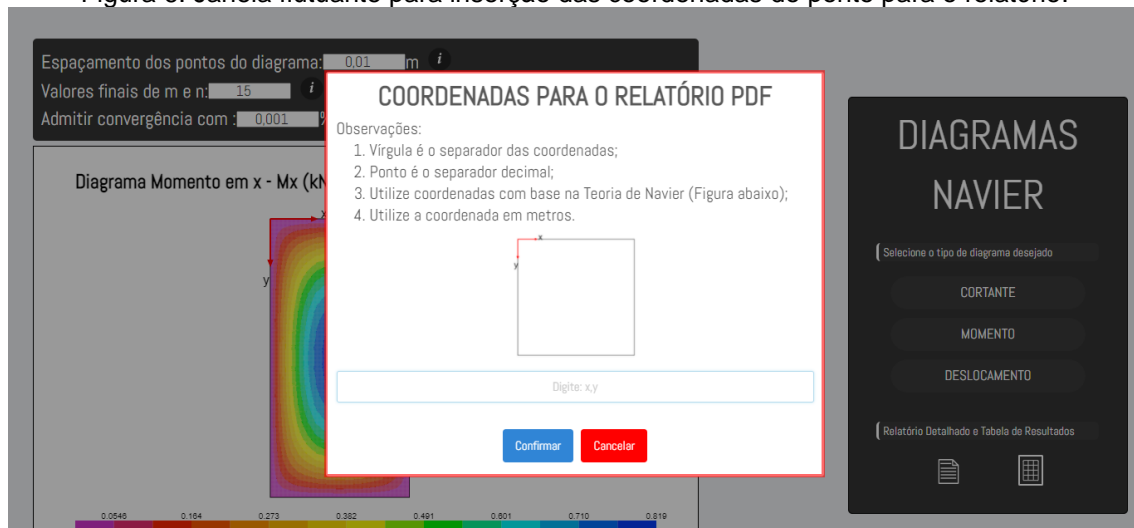
Figura 5: Menus dos Diagramas.



Fonte: O próprio autor (2021).

Para gerar o relatório, foi feito um algoritmo de modo que, ao clicar sobre o botão com o ícone de documento no menu principal (Figura 4), uma janela flutuante é emitida para que o usuário possa inserir as coordenadas do ponto que ele deseja analisar (ver Figura 6). Com a inserção das coordenadas e um clique em confirmar, o relatório é gerado em uma nova guia no formato pdf.

Figura 6: Janela flutuante para inserção das coordenadas do ponto para o relatório.



Fonte: O próprio autor (2021).

No relatório podem ser vistos os dados de entrada do usuário (Figura 7), uma breve introdução teórica sobre o método de Navier (Figura 7), uma resolução algébrica (Figura 8) que demonstra como obter as funções de deslocamento e esforços internos de acordo com as cargas de entrada, uma resolução numérica (Figura 9) para o ponto escolhido e os resultados (tabela resumo e os diagramas).

Figura 7: Parte do relatório – dados de entrada e introdução teórica.

Tabela 2 - Dados dos apoios.		
Tipo de apoio	Índice	Lado
Apoiada	0	0-1
Apoiada	1	1-2
Apoiada	2	2-3
Apoiada	3	3-0

**CARGA SOBRE TODA LAJE**

Por meio da Tabela 3 podem ser observados os dados da Carga Sobre Toda Laje.

Tabela 3 - Dados da Cargas Sobre Toda Laje.	
Índice	Módulo (kN/m²)
0	2.000

**INTRODUÇÃO TEÓRICA - MÉTODO DE NAVIER**

O Método de Navier consiste em determinar uma solução algébrica para a Equação de Lagrange, uma equação diferencial que estabelece o comportamento físico de uma placa, desde que se

Fonte: O próprio autor (2021).

Figura 8: Relatório – parte da resolução algébrica.

**RESOLUÇÃO ALGÉBRICA**

Para uma laje simplesmente apoiada tem-se a função do deslocamento genérica (11) e o coeficiente de carga genérica (12).

**FUNÇÕES REFERENTES A CARGA DISTRIBUÍDA UNIFORMEMENTE SOBRE TODA LAJE**

Como a laje está sujeita a uma carga  $q_0$  uniformemente distribuída (constante sobre toda laje), ela não depende de  $x$  e  $y$ :

$$p(x, y) = q_0 \quad (13)$$

Substituindo (13) em (12), conseguimos o coeficiente ( $p_{mn}$ ) para tal carga:

$$p_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \quad (14)$$

Substituindo (14) em (11), obtemos a função algébrica do deslocamento de uma laje simplesmente apoiada sujeita a uma carga distribuída uniformemente:

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \quad (15)$$

Tendo a função do deslocamento conseguimos as funções dos esforços internos por meio das relações de (1) a (5).

Substituindo (15) em (1) e desenvolvendo, obtemos a função algébrica do momento fletor na direção  $x$  para tal carga (16). Analogamente, conquistamos a função algébrica do momento fletor

Fonte: O próprio autor (2021).

Figura 9: Relatório – parte da resolução numérica.

3	13	-0.000312	19.468	0.00160
3	15	0.000167	19.468	0.000858
5	1	0.0100	19.478	0.0516

Conforme visualizado na Tabela 4 o somatório foi parado pelo critério da diferença percentual.

**Cálculo das constantes de (15):**

O valor de  $D$  é conseguido por meio de (7):  
 $D = (210000000 \cdot (0.03^3)) / (12 \cdot (1 - 0.3^2)) = 519.231 \text{ [kN}\cdot\text{m]}$

Constante da função:  
 $(16) / ((\pi^6) \cdot D) = (16) / ((\pi^6) \cdot 519.231) = 0.0000321 \text{ [1/(kN}\cdot\text{m)]}$

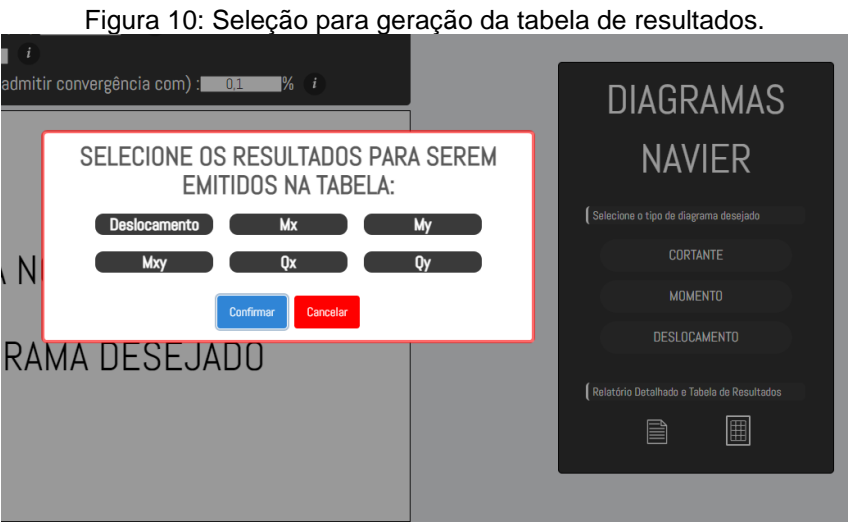
$\Sigma \Sigma q_0 \cdot u$  (conforme visualizado na Tabela) = 19.468 [kN·m²]

**Valor de  $w(1,2)$ :**  
 $w(1,2) = 0.0000321 \cdot 19.468 = 0.000624 \text{ m}$

Fonte: O próprio autor (2021).

Também foi elaborado um algoritmo que permite ao usuário gerar uma tabela que contém as coordenadas e valores dos pontos. O algoritmo foi construído de modo que, ao clicar sobre o botão com o ícone de tabela, no menu principal, uma janela flutuante (ver Figura 10) é emitida para que o usuário escolha quais resultados sejam inseridos na tabela. Com isso, ao clicar em

confirmar, é gerado um pdf em uma nova guia contendo a tabela, conforme a Figura 11.



Fonte: O próprio autor, 2021.

Figura 11: Tabela de resultados.

x (m)	y (m)	Deslocamento (mm)	Mx (kN*m/m)	My (kN*m/m)	Mxy (kN*m/m)	Qx (kN/m)	Qy (kN/m)
1.400	0.100	0.0498	0.0809	0.0740	0.192	-0.0751	1.141
1.500	0.100	0.0439	0.0742	0.0681	0.235	-0.110	1.046
1.600	0.100	0.0367	0.0676	0.0604	0.275	-0.139	0.943
1.700	0.100	0.0286	0.0570	0.0498	0.310	-0.182	0.784
1.800	0.100	0.0196	0.0433	0.0365	0.338	-0.255	0.580
1.900	0.100	0.00999	0.0250	0.0201	0.356	-0.313	0.327
2.000	0.100	7.84e-18	2.26e-17	1.71e-17	0.362	-0.373	2.84e-16
-6.38e-16	0.200	-1.27e-16	-3.24e-16	-2.41e-16	-0.349	0.681	-1.67e-15
0.100	0.200	0.0197	0.0470	0.0359	-0.343	0.583	0.252
0.200	0.200	0.0388	0.0823	0.0659	-0.326	0.480	0.465
0.300	0.200	0.0565	0.109	0.0908	-0.300	0.352	0.644
0.400	0.200	0.0726	0.130	0.111	-0.268	0.273	0.790
0.500	0.200	0.0868	0.144	0.125	-0.230	0.217	0.899
0.600	0.200	0.0986	0.157	0.137	-0.188	0.151	0.988
0.700	0.200	0.108	0.167	0.148	-0.144	0.118	1.062
0.800	0.200	0.115	0.172	0.153	-0.0970	0.0827	1.106
0.900	0.200	0.119	0.176	0.158	-0.0489	0.0373	1.137
1.00	0.200	0.120	0.178	0.159	-3.63e-16	1.23e-16	1.148
1.100	0.200	0.119	0.176	0.158	0.0489	-0.0373	1.137
1.200	0.200	0.115	0.172	0.153	0.0970	-0.0827	1.106
1.300	0.200	0.108	0.167	0.148	0.144	-0.118	1.062
1.400	0.200	0.0986	0.157	0.137	0.188	-0.151	0.988
1.500	0.200	0.0868	0.144	0.125	0.230	-0.217	0.899

Fonte: O próprio autor, 2021.

### PROCESSO DE VERIFICAÇÃO DO CRITÉRIO DE PARADA

Computacionalmente, o critério de parada dos cálculos das funções de Navier seguem os dois parâmetros citados anteriormente (valores finais de m,n e a tolerância). Com isso, inicialmente, o algoritmo foi programado para que verificasse, a cada termo, a diferença percentual entre a parcela atual e a parcela anterior do somatório até atingir o valor de m,n final adotado pelo usuário. Mas caso a diferença percentual (em determinado valor de m,n) fosse menor que a tolerância escolhida pelo usuário, o algoritmo parava o somatório. Entretanto, foi analisado que, conforme os valores de m,n variam, nem sempre as diferenças

percentuais dos termos das funções de Navier diminuem. Para um melhor entendimento considere uma tolerância adotada de 0,01%. Pela Tabela 1, fica evidente que o algoritmo pararia em  $m=7$  e  $n=15$ , mas em  $m = 9$  e  $n = 1$  a diferença percentual aumenta, ficando novamente maior que a tolerância.

Dessa forma, quando o critério de parada é programado para ser verificado a cada termo, a inconsistência nos resultados se torna evidente nos diagramas, onde são notadas distorções. De início, acreditava-se que tais distorções estavam relacionadas com a tolerância adotada pelo usuário, no entanto, observou-se que sua diminuição não implica em um menor números de distorções. Na Figura 12, podem ser visualizados diagramas com pequenas distorções, cuja as informações estão na Tabela 2.

Tabela 1: Exemplo para análise do critério de parada.

m	n	Diferença Percentual (%)
7	15	0,0092%
9	1	0,2207%
9	3	0,0704%

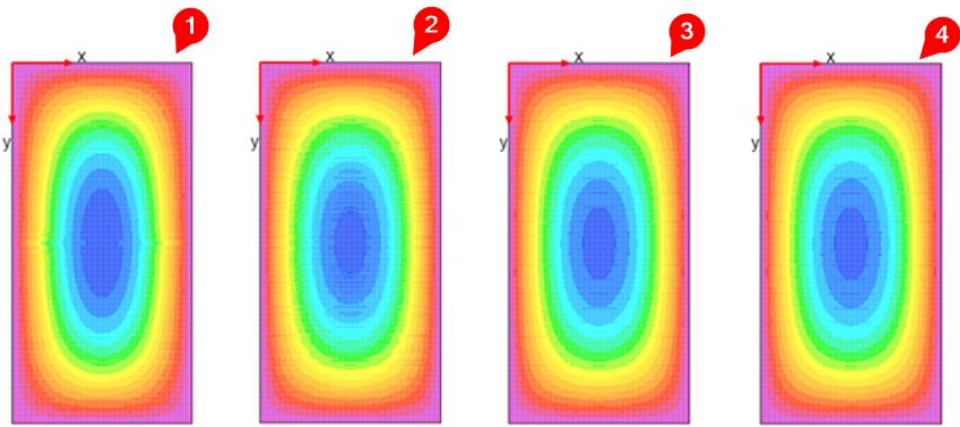
Fonte: O próprio autor (2021).

Tabela 2: Informações dos diagramas contidos na Figura 12.

Diagrama	Esforços	Tolerância adotada
1	Mx	0,001%
2	Mx	0,0001%
3	Mx	0,00001%
4	Mx	0,000001%

Fonte: O próprio autor (2021).

Figura 12: Influência da tolerância verificada a cada termo nos diagramas.

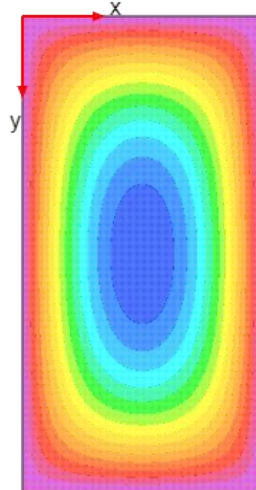


Fonte: O próprio autor (2021).



Nesse sentido, o algoritmo foi programado para verificar somente quando  $m$  varia, já que é nesse termo que a diferença percentual sempre aumenta e as distorções não acontecem. A Figura 13 mostra o diagrama 1 da Tabela 2 com critério de parada programado desta maneira (veja que desaparecem as distorções).

Figura 13: Diagrama 1 da Tabela 2 com o atual critério de parada.



Fonte: O próprio autor (2021).

Especificamente para as funções da carga sobre região e pontual, foram notadas outras particularidades. Nelas o valor de  $m, n$  variam nos inteiros (1,2,3...), de modo que, quando  $m$  ou  $n$  é par e  $x$  ou  $x_i$  ( $x$  é o ponto analisado e  $x_i$  é a coordenada em  $x$  do centro da carga) é igual a  $a/2$  (metade da largura da laje) o valor do termo do duplo somatório pode resultar muito próxima a 0; por conseguinte a diferença percentual também. Analogamente, acontece com  $y$  e  $y_i$ , quando um ou outro é  $b/2$  (metade da altura). Portanto, como a verificação é feita só quando  $m$  varia, a convergência sempre acaba parando em  $m=2$  e  $n=1$  nessas funções, conforme observado na Tabela 3.

Tal situação também gera distorções nos diagramas, principalmente quando se tem mais de uma carga sobre região. Com isso, caso o usuário queira que o critério de parada seja verificado apenas pelo número final de  $m, n$  ele pode adotar a tolerância igual a 0, tendo em vista que, numericamente, dificilmente a diferença percentual chega exatamente em 0.

Tabela 3: Convergência nas funções de carga sobre região e pontual.

$m$	$n$	Valor do termo	Diferença percentual (%)
1	1	34,895	-
1	2	-3E-16	0,0000%



1	3	4,8705	13,9579%
1	4	-2E-16	0,0000%
2	1	-5E-16	0,0000%

Fonte: O próprio autor (2021).

## EXEMPLOS E ANÁLISES

Os valores das funções e seus diagramas serão apresentados em exemplos, de modo a simplificar as análises. Tais exemplos seguirão o padrão de dados da laje apresentado na Tabela 4.

O software RFEM (DLUBAL, 2021) foi utilizado para comparação de resultados, sendo que os modelos foram criados em análise linear e com malha de elementos finitos de 5 por 5 cm (essa malha foi refinada até este valor para atingir uma convergência satisfatória).

Tabela 4: Dados das lajes.

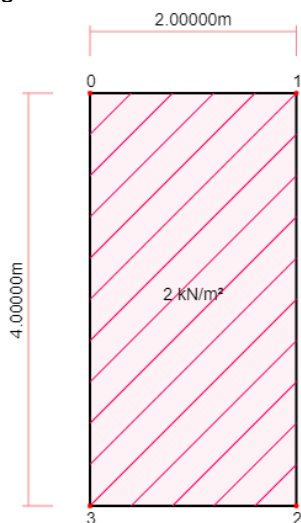
Dados	Valores
E (GPa)	210
$\nu$	0,3 <sup>1</sup>

Fonte: O próprio autor (2021).

### Exemplo 1 – Carga sobre toda a laje:

Por meio da Figura 14, é notada uma laje de 4 lados apoiados com espessura de 0,03 m e as dimensões 2x4 (m) sujeita a uma carga uniforme de  $2\text{kN/m}^2$ .

Figura 14: Detalhes do exemplo 1.

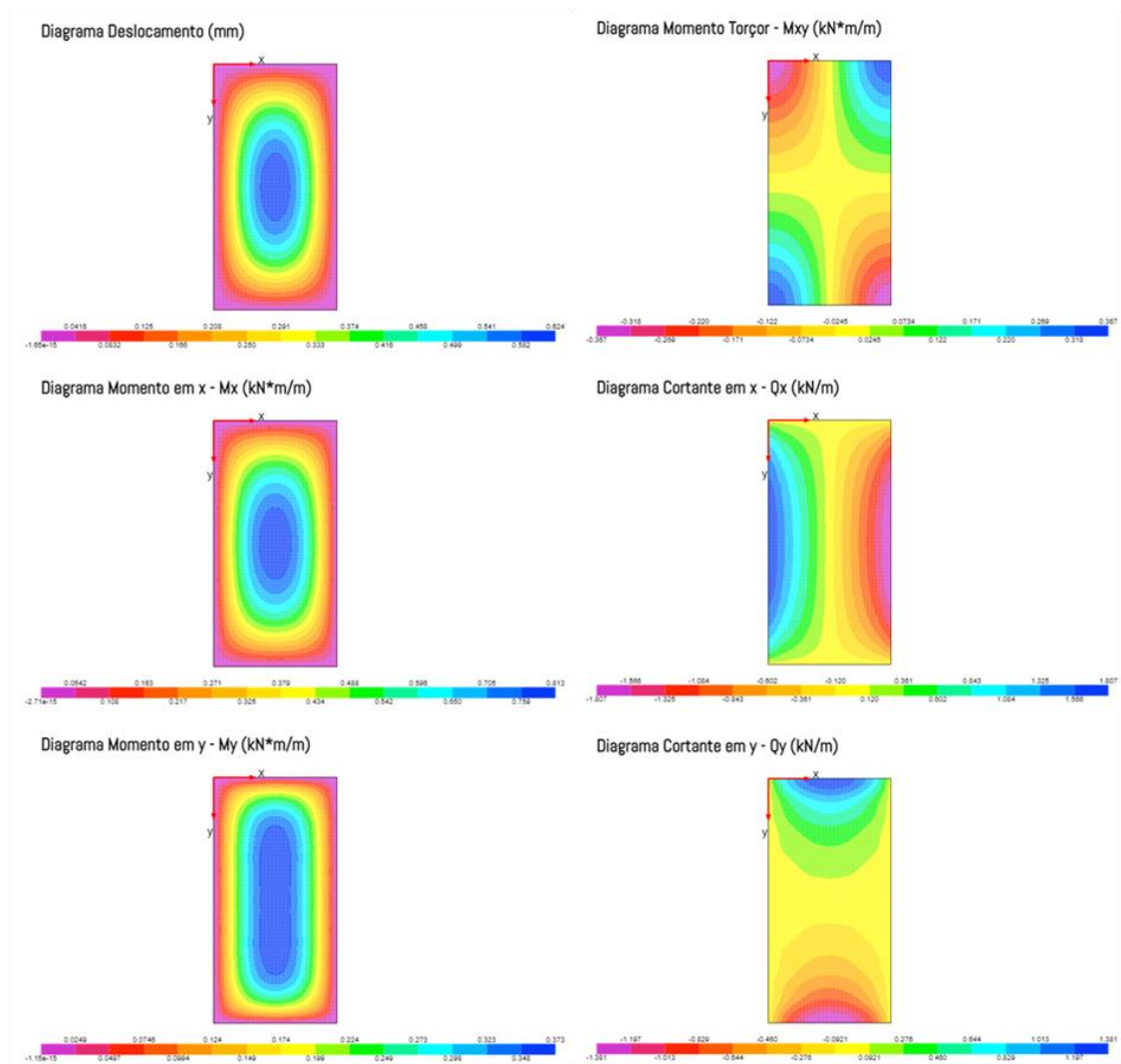


Fonte: O próprio autor (2021)

<sup>1</sup> Exceto, nas comparações com Marcus tabelas clássicas, apresentadas, por exemplo, em Diel (2018), onde  $\nu = 0$ .

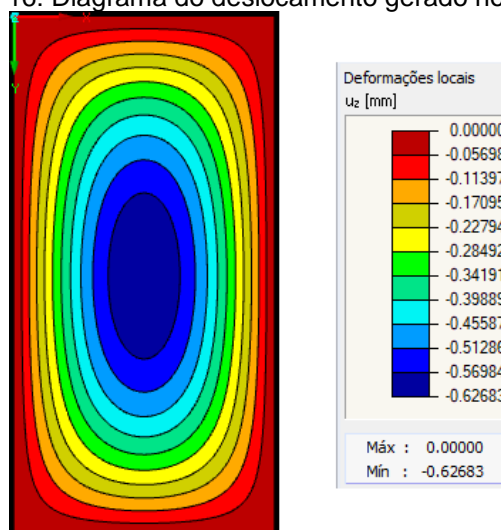
Com a entrada desses dados no IFESTRUT-LAJES, sendo  $m, n = 15$  e admitindo tolerância de 0,1%, conseguimos os diagramas apresentados na Figura 15. Para efeito de comparação, temos, na Figura 16, o diagrama de deslocamento para esse exemplo gerado pelo RFEM (DLUBAL, 2021). Sendo observada a semelhança das formas das curvas e seus valores. Além disso, para os valores máximos dos esforços e deslocamento, tem-se as comparações contidas nas Tabelas 5 e 6. Na Tabela 5, temos a comparação de valores máximos com o método de Marcus tabelas clássicas apresentadas, por exemplo, em Diel (2018, p.75). Na Tabela 6, tem-se a comparação com o RFEM (DLUBAL, 2021) (MEF).

Figura 15: Diagramas do exemplo 1.



Fonte: O próprio autor (2021).

Figura 16: Diagrama do deslocamento gerado no RFEM.



Fonte: RFEM (2021).

Tabela 5: Comparações Navier e Marcus,  $\nu = 0$ .

Momentos	Marcus	Navier	Diferença (%)
$M_x$ (kN * m/m)	0,757	0,771	1,850%
$M_y$ (kN * m/m)	0,189	0,200	5,820%
	0,189	0,200	5,820%

Fonte: O próprio autor (2021).

Pela Tabela 5, observa-se que os resultados de Navier são próximos e maiores aos obtidos pelo método de Marcus.

Tabela 6: Comparações Navier e RFEM (MEF),  $\nu = 0,3$ .

Deslocamentos e esforços	x (m)	y (m)	RFEM (MEF)	Navier	Diferença (%)
$w$ (mm)	1,000	2,000	0,627	0,624	0,418%
$M_x$ (kN * m/m)	1,000	2,000	0,816	0,813	0,345%
$M_y$ (kN * m/m)	1,000	2,680	0,371	0,373	0,536%
	1,000	1,320	0,371	0,373	0,536%
$M_{xy}$ (kN * m/m)	0,000	4,000	0,369	0,367	0,545%
	2,000	0,000	0,369	0,367	0,545%
$Q_x$ (kN/m)	0,000	2,000	1,916	1,807	6,032%
$Q_y$ (kN/m)	1,000	0,000	1,653	1,377	20,044%

Fonte: O próprio autor (2021).

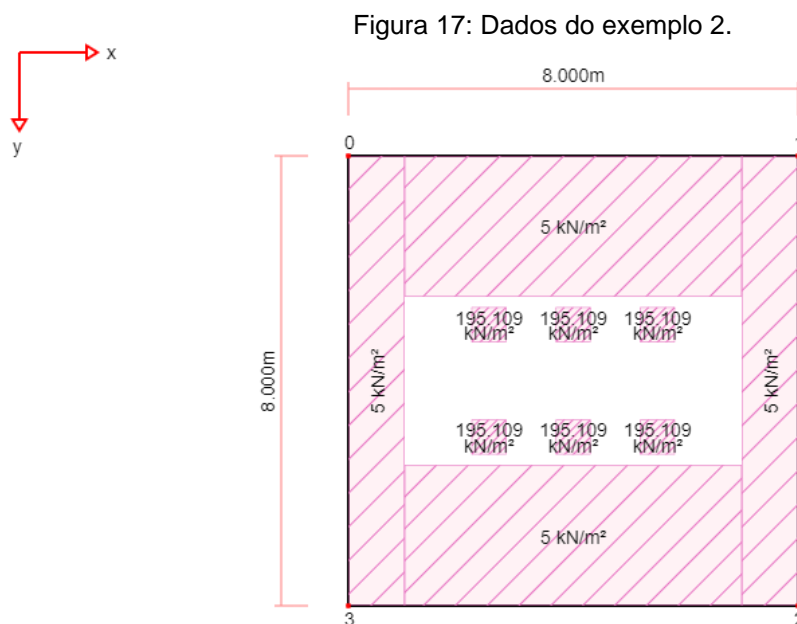
Analisando os resultados contidos na Tabela 6, para o momento fletor na direção y ( $M_y$ ) e momento torçor ( $M_{xy}$ ), os valores máximos foram comparados em dois pontos, os quais as coordenadas y são simétricas em relação ao centro da placa.

Nota-se que, com o  $m, n = 15$ , os valores de Navier são semelhantes aos valores de deslocamento e momentos do MEF, entretanto, há diferenças consideráveis entre os valores das cortantes. Com isso, notou-se que a convergência das funções das cortantes de Navier necessitavam de altos valores finais de  $m, n$  e/ou uma baixa tolerância. Por exemplo, com  $m, n = 90$  e tolerância de 0,001% consegue-se um valor de cortante na direção  $x$  igual a 1,851 kN/m e na direção  $y$  igual a 1,461 kN/m.

### Exemplo 2 – Carga sobre região:

Na Figura 17, pode ser observado o conjunto de cargas trem-tipo TB450 disposto em uma laje simplesmente apoiada, com espessura de 0,3 m e dimensões de 8x8 m. Posteriormente, nas Figuras 18 e 19, tem-se, respectivamente, o diagrama do momento fletor  $x$  e  $y$ . Bem como, na Figura 20 pode ser visto os diagramas do momento fletor na direção  $x$  e  $y$ , gerados pelo RFEM (DLUBAL, 2021).

Na Tabela 7, pode ser visualizado a diferença entre os resultados de Navier com o software T-Rüsch (KHOURI; SERAPIÃO; CARDOSO JUNIOR, [20??]), que utiliza o método de Rüsch (1965) para o cálculo dos momentos fletores gerados pelo conjunto de carga do trem-tipo TB450. Já na Tabela 8, tem-se a comparação entre os resultados de Navier com o software RFEM (DLUBAL, 2021).



Fonte: O próprio autor (2021).

Para obtenção dos resultados de Navier, foi considerado espaçamento entre os pontos igual a 0,1m; tolerância de 0% (para o algoritmo considerar apenas os valores finais de m,n); número final de m,n igual a 50.

Tabela 7: Comparação entre Navier e T- Rüsç dos valores máximos.

<b>Esforços</b>	<b>T-Rüsç</b>	<b>Navier</b>	<b>Diferença (%)</b>
<i>M<sub>x</sub> (kN * m/m)</i>	45,454	45,790	0,739
<i>M<sub>y</sub> (kN * m/m)</i>	47,435	48,262	1,743

Fonte: O próprio autor (2021).

Observa-se, conforme a Tabela 7, que as diferenças percentuais entre os valores dos momentos fletores de Navier e as tabelas de Rüsç (1965) são pequenas.

Tabela 8: Comparação com o RFEM (MEF).

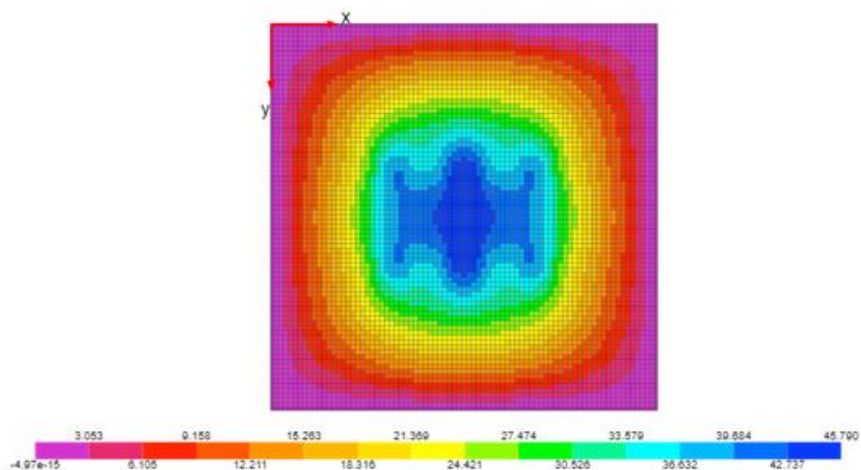
<b>Deslocamentos e esforços</b>	<b>x (m)</b>	<b>y (m)</b>	<b>RFEM (MEF)</b>	<b>x (m)</b>	<b>y (m)</b>	<b>Navier</b>	<b>Diferença (%)</b>
<i>M<sub>x</sub> (kN * m/m)</i>	4	3,300	45,813	4	3,400	45,790	0,050
	4	4,700		4	4,600		
<i>M<sub>y</sub> (kN * m/m)</i>	4	3,050	48,241	4	3,100	48,262	0,044
	4	4,950		4	4,900		

Fonte: O próprio autor (2021).

A Tabela 8 revela que os valores máximos obtidos pelas funções momento fletores na direção x e y de Navier devido a carga sobre região se apresentaram em coordenadas diferentes do que as do RFEM (DLUBAL, 2021), mas próximas. Tal divergência pode estar relacionada ao fato que as cargas do conjunto trem tipo devem serem posicionadas manualmente no software RFEM (DLUBAL, 2021), enquanto no IFESTRUT-LAJES elas são colocadas automaticamente.

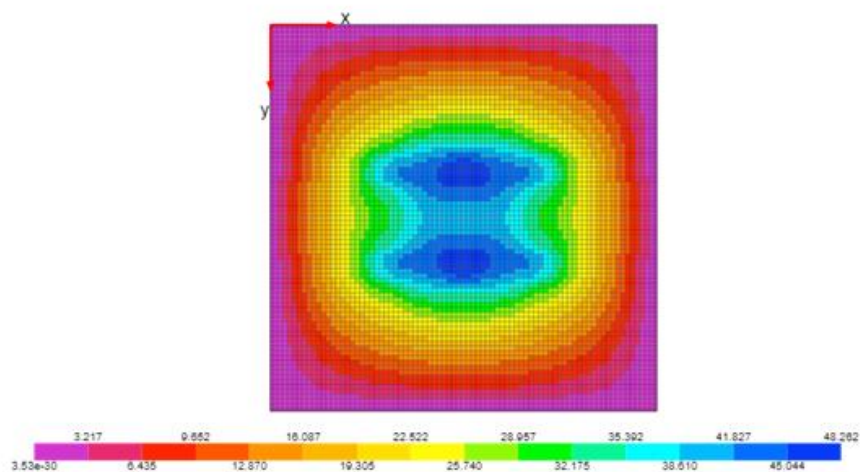
Além disso, as diferenças percentuais entre os valores de Navier e do RFEM (DLUBAL, 2021) são próximas de 0, ou seja, os valores são quase idênticos.

Figura 18: Diagrama do momento em x do exemplo 2, gerado no IFESTRUT-LAJES.  
Diagrama Momento em x -  $M_x$  (kN\*m/m)



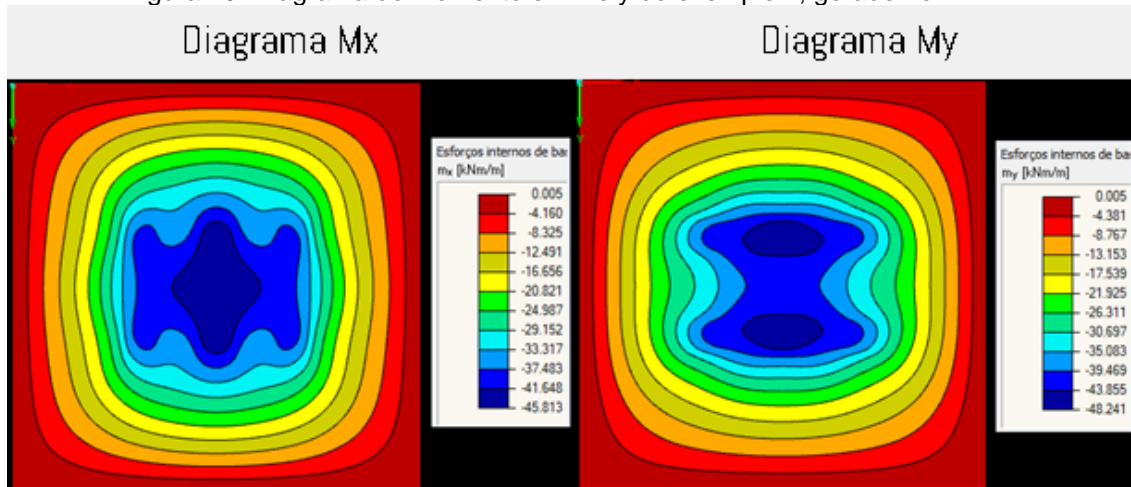
Fonte: O próprio autor (2021).

Figura 19: Diagrama do momento em y do exemplo 2, gerado no IFESTRUT-LAJES.  
Diagrama Momento em y -  $M_y$  (kN\*m/m)



Fonte: O próprio autor (2021).

Figura 20: Diagrama do momento em x e y do exemplo 2, gerado no RFEM.



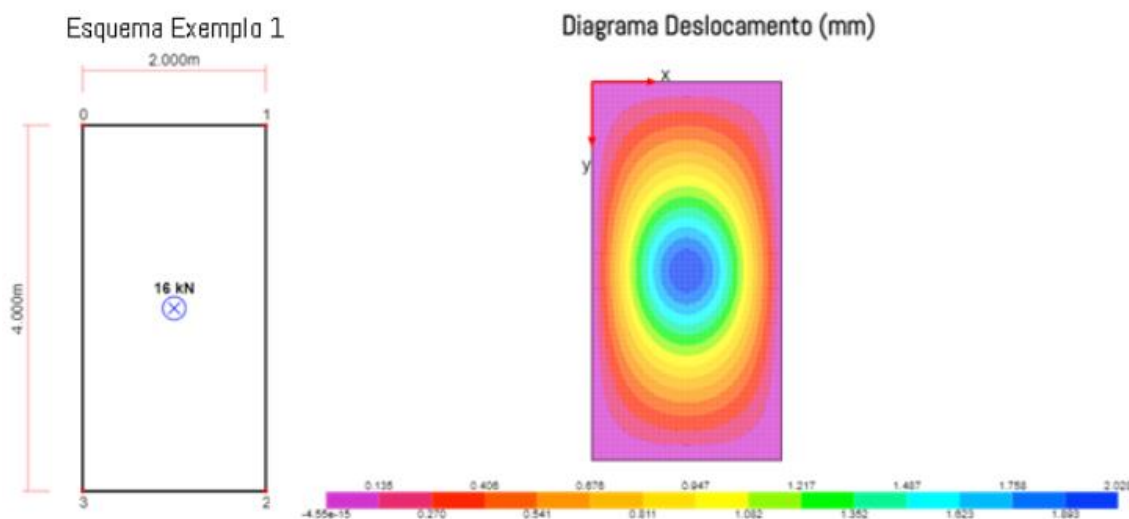
Fonte: RFEM (2021).

### Exemplo 3 – Carga concentrada:

Por meio da Figura 21 (lado esquerdo), nota-se uma laje simplesmente apoiada com dimensões 2x4 m, espessura de 0,03m e uma carga pontual de 16 kN no centro da laje. Entrando com esses dados no IFESTRUT-LAJES, para a obtenção dos resultados, os parâmetros foram: espaçamento entre os pontos igual a 0,01m; a tolerância de 0% (para o algoritmo considerar apenas os valores finais de m,n); número final de m,n igual a 15.

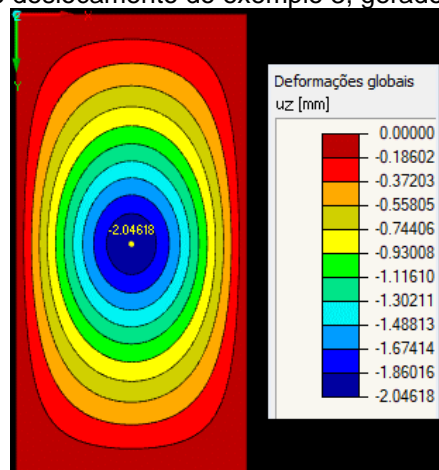
Nas Figuras 21 (lado direito) e 22, tem-se, respectivamente, o diagrama do deslocamento gerado pelo IFESTRUT-LAJES e RFEM (DLUBAL, 2021). Bem como na Tabela 9, a diferença percentual entre os dois valores máximos dos diagramas.

Figura 21: Dados do exemplo 3 e Diagrama do deslocamento do exemplo 3, gerado pelo IFESTRUT-LAJES.



Fonte: O próprio autor (2021).

Figura 22: Diagrama do deslocamento do exemplo 3, gerado pelo IFESTRUT-LAJES.



Fonte: RFEM (2021).

Tabela 9: Comparação dos deslocamentos máximos, do Exemplo 3, entre Navier e RFEM (MEF).

Deslocamento	x (m)	y (m)	RFEM (MEF)	Navier	Diferença (%)
w (mm)	1	2	2,046	2,028	0,887

Fonte: O próprio autor (2021).

Pela Tabela 9, fica claro que o resultado de Navier é satisfatório devido a pequena diferença com o MEF dado pelo RFEM (DLUBAL, 2021).

### CONCLUSÃO (RESULTADOS DA PESQUISA)

Tendo em vista que os resultados obtidos por meio das funções algébricas de Navier em geral são satisfatórios, o módulo contido no IFESTRUT-LAJES poderá ser utilizado por alunos, professores, bem como qualquer outro usuário interessado. O maior foco é disponibilizar os relatórios, que auxiliam os usuários com a exibição dos cálculos, de modo que tanto alunos possam utilizá-lo como material de estudo quanto professores como elemento auxiliador na metodologia de ensino.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 7188:** Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas. Rio de Janeiro: ABNT, 2013.

DIAS, Nickolas Leitão. **A Teoria da Flexão de Placas Envolvendo a Equação Diferencial de Lagrange**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática Aplicada Bacharelado) - Universidade Federal do Rio Grande, 2019. Disponível em: <[https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica\\_aplicada/2019/2019-2\\_Nickolas\\_Leitao\\_Dias.pdf](https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica_aplicada/2019/2019-2_Nickolas_Leitao_Dias.pdf)>. Acesso em: 09 dez. 2021.

DIEL, Ane Priscila. Tabela A.3.1 - Processo de Marcus. In: DIEL, Ane Priscila. **Análise comparativa de esforços e deslocamentos em lajes maciças de concreto armado através dos métodos de analogia de grelha e tabelas**. 2018. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Universidade Federal de Santa Maria, [S. l.], 2018. Disponível em: [http://coral.ufsm.br/engcivil/images/PDF/1\\_2018/TCC\\_ANE%20PRISCILA%20DIEL.pdf](http://coral.ufsm.br/engcivil/images/PDF/1_2018/TCC_ANE%20PRISCILA%20DIEL.pdf). Acesso em: 09 dez. 2021.



FERNANDES, Jonatan Vitor de Melo; NIRSCHL, Gustavo Cabrelli. **Base Cad-Lajes On-Line Para Programas de Engenharia Civil – Frente 1.** [S. l.], 2020. Disponível em: <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/lfestrut-lajes/lfestrut-desenv-lajes.html?>. Acesso em: 14 dez. 2021.

KHOURI, Gustavo Elias; SERAPIÃO, Mariana Silva; CARDOSO JUNIOR, Sander David. **T-Rüsch**: Aplicativo para o cálculo de esforços em lajes de pontes pelo método de Rüsch. 1.0. [S. l.], [20??]. Disponível em: <https://www.tqs.com.br/apps/t-rusch/a6q52fh86z> Acesso em: 09 dez. 2021.

PTC. **MathCad Prime 7.** [S. l.], 2021. Disponível em: <https://www.mathcad.com/pt>. Acesso em: 14 dez. 2021.

RFEM (DLUBAL, 2021) (Alemanha). **RFEM**: Programa estrutural de MEF para uso profissional. 5.25.02. Tiefenbach, 2021. Disponível em: <https://www.dlubal.com/en/products/rfem-fea-software/what-is-rfem>. Acesso em: 11 dez. 2021.

SILVA, Guilherme dos Santos; NIRSCHL, Gustavo Cabrelli. **BASE CAD-LAJES ON-LINE PARA PROGRAMAS DE ENGENHARIA CIVIL – FRENTE 2.** [S. l.], 2020. Disponível em: <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/lfestrut-lajes/lfestrut-desenv-lajes.html?>. Acesso em: 14 dez. 2021.

SOARES, Adilson Moreira. **Análise comparativa de esforços e deflexões em placas retangulares finas.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Itajubá. Itajubá-MG, 2004. Disponível em: < <http://docplayer.com.br/82668953-Universidade-federal-de-itajuba.html> >. Acesso em: 09 dez. 2017.

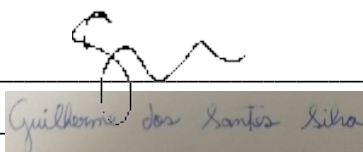
SZILARD, Rudolph. **Theories and Applications of Plate Analysis**: classical, numerical and engineering methods. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.

TIMOSHENKO, S. **History of strength of materials**: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. Nova York: McGraw-Hill, 1953. Reimpressão, Nova York: Dover, 1983.

RÜSCH, Hubert. **Berechnungstafeln für rechtwinklige Fahrbahnplatten von Straßenbrücken.** Berlin: Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1965.

Assinatura do orientador: \_\_\_\_\_

Assinatura do bolsista: \_\_\_\_\_



Guilherme dos Santos Silva