

## 12º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2021

### ANÁLISE DE LAJES RETANGULARES SIMPLEMENTE APOIADAS PELO MÉTODO DE NAVIER: MÓDULO DE PROGRAMA ON-LINE

GUILHERME DOS SANTOS SILVA<sup>1</sup>, GUSTAVO CABRELLI NIRSCHL<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Graduando em Engenharia Civil, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Câmpus Votuporanga, guilherme\_cajobi@outlook.com.br.

<sup>2</sup> Prof. Msc. na área de Engenharia Civil, Orientador PIBIFSP, IFSP, Câmpus Votuporanga, ~~nirschl@gmail.com~~.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 3.01.02.04-9 Mecânica das Estruturas

[nirschl@ifsp.edu.br](mailto:nirschl@ifsp.edu.br)

**RESUMO:** Atualmente existem inúmeros programas de computador que realizam cálculos para problemas enfrentados há tempos por engenheiros, mas a sua maioria mostra somente os resultados finais. Tendo em vista tal problemática, criou-se um módulo nas linguagens *web* (HTML/JavaScript) para um ambiente gráfico que permite desenhar elementos relacionados a lajes, chamado IFESTRUT-LAJES. Tal módulo implementou ao IFESTRUT-LAJES a análise estrutural de lajes simplesmente apoiadas, pelo método de Navier. Além disso, o módulo não só realiza cálculos, mas exibe todos os procedimentos de cálculos em relatórios gerados no formato pdf (*portable document format*) que podem auxiliar professores e alunos.

**PALAVRAS-CHAVE:** análise estrutural; *web*; javascript; lajes; relatório; Navier.

### ANALYSIS OF RECTANGULAR SLABS SIMPLY SUPPORTED BY THE NAVIER METHOD: SOFTWARE MODULE

**ABSTRACT:** There are currently several softwares that realize perform calculations for problems faced by engineers for a long time, but most show only the final results. Faced with this problem, a module in web languages (HTML / JavaScript) was created for a graphical environment that allows designing elements related to slabs, called IFESTRUT-LAJES. This module implemented in IFESTRUT-LAJES the structural analysis of simply supported slabs, by the Navier method. In addition, the module not only perform calculations, but displays all calculation procedures in reports generated in pdf format (*portable document format*) that can help professors and students.

**KEYWORDS:** structural analysis; web; javascript; slabs; report; Navier.

### INTRODUÇÃO

Com avanço do meio tecnológico, surgem possibilidades de se utilizar métodos que antes eram trabalhosos, mas agora são viáveis por meio de cálculos computacionais. Nesse sentido, existem inúmeros programas de computador que realizam cálculos para problemas enfrentados há tempos por engenheiros, entretanto, a maioria desses programas mostram somente os resultados finais ou alguns passos. Dessa forma, um grupo de pesquisa já cadastrado no CNPq tem desenvolvido programas que não só fazem cálculos, mas que demonstram todo o procedimento realizado em relatórios gerados no formato pdf que podem auxiliar professores e alunos.

Nesse sentido, por meio das linguagens de programação web (HTML/JavaScript) criou-se e apresenta-se aqui um módulo de análise estrutural de lajes pelo método de Navier para um ambiente gráfico, que permite desenhar elementos relacionados a lajes, chamado IFESTRUT-LAJES. Portanto, o módulo implementou ao IFESTRUT-LAJES a análise estrutural de deslocamentos e esforços, pela solução de Navier, de lajes retangulares simplesmente apoiadas sujeitas a carga distribuída em toda a laje, distribuída em uma região retangular ou concentrada. Além disso, viabilizou um relatório no formato pdf (*portable document format*), criado por meio de uma biblioteca JavaScript chamada PDFMake (PAMPUCH; M., 2020), com todos os procedimentos de cálculos, para que tanto alunos possam utilizá-lo como material de estudo quanto professores como elemento auxiliador na metodologia de ensino.

## MATERIAL E MÉTODOS

O Método de Navier consiste em descobrir uma solução analítica para a Equação de Lagrange, uma equação diferencial que, segundo Dias (2019, p. 11): “descreve o comportamento físico de uma placa”, desde que se tenha as condições de contorno (DIAS, 2019). De acordo com Szilard (2004), para lajes com espessuras muito menores que as outras dimensões, chamadas de lajes delgadas, podemos considerá-las como bidimensionais em um sistema de coordenadas (x,y). Desse modo, tem-se a Equação de Lagrange em coordenadas cartesianas (1), mostrada, por exemplo, em Dias (2019).

Navier em 1820 apresenta a solução (função do deslocamento) analítica (2) para a Equação de Lagrange, conforme Timoshenko (1953, p. 121), para lajes retangulares com dimensões  $a \times b$  (lado “a” paralelo a x e lado “b” paralelo a y) simplesmente apoiadas sujeitas a uma carga genérica  $p(x, y)$  (cuja seu coeficiente de carga é  $p_{mn}$ (3)). Tendo a função do deslocamento, com as Teorias da Elasticidade e de Kirchhoff, é possível obter as funções dos esforços internos (momentos fletores, momento torçor, forças de cisalhamento transversais), por meio de relações de (5) a (9) (SZILARD, 2004).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D} \quad (1)$$

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (2)$$

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (3)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4)$$

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (5)$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (6)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (7)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (8)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (9)$$

em que,

$w \rightarrow$  função do deslocamento transversal da placa;

$M_x$  e  $M_y \rightarrow$  momentos fletores nas direções x e y, respectivamente;

$M_{xy} \rightarrow$  momento torçor;

$Q_x$  e  $Q_y \rightarrow$  cortantes nas direções x e y, respectivamente;  
 $E \rightarrow$  módulo de elasticidade;  
 $D \rightarrow$  rigidez da placa, equação (4);  
 $t \rightarrow$  espessura da placa;  
 $\nu \rightarrow$  coeficiente de Poisson;  
 $p(x, y) \rightarrow$  função da carga sobre a placa;  
 $p_{mn} \rightarrow$  coeficiente de carga de  $p(x, y)$ , equação (3).  
 $m$  e  $n \rightarrow$  ~~índices que variam nos~~ números inteiros.

Portanto, para cada tipo de carga presente no IFESTRUT-LAJES (carga sobre toda laje, carga sobre região e carga concentrada) suas funções algébricas de deslocamento e esforços foram implementadas computacionalmente. Para validação dos valores, foi utilizado o software RFEM (DLUBAL, 2021) que utiliza o método dos elementos finitos.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após desenhada a laje como entrada de dados no programa IFESTRUT-LAJES, por meio da Figura 1 é possível observar a tela de saída da implementação apresentada neste trabalho, a qual é mostrada quando o usuário aperta o botão Navier em Funções, contornado em vermelho. Ainda na Figura 1, podem ser visualizados em azul, a tela de impressão e os parâmetros iniciais: espaçamentos dos pontos do diagrama e os valores finais de m e n das séries duplas das funções de Navier. Em verde (Figura 1) temos o menu principal, o qual o usuário pode escolher qual diagrama ele deseja analisar.

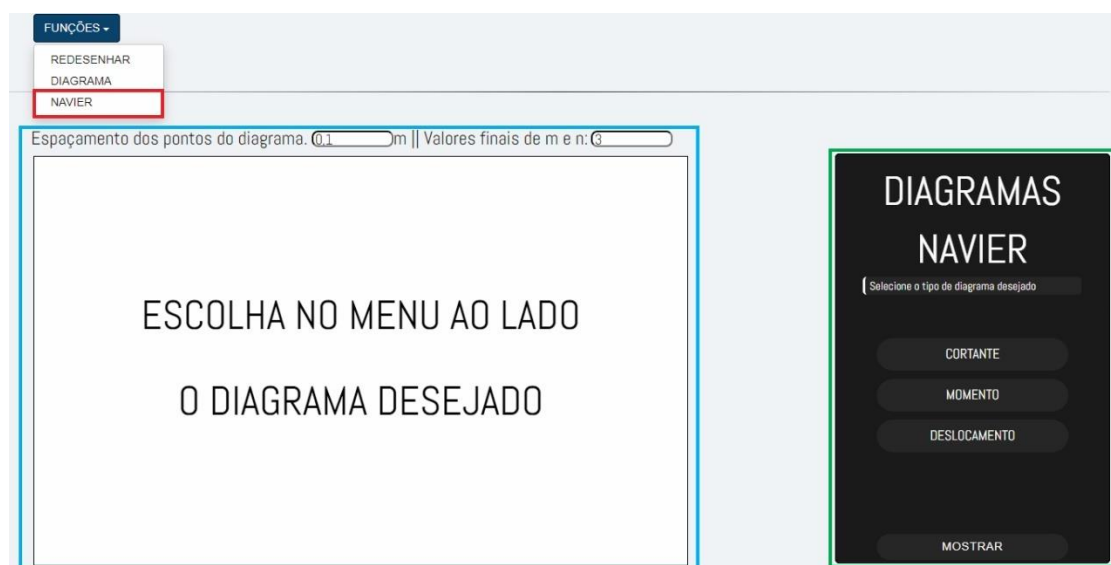


Figura 1. Tela principal da implementação do módulo no IFESTRUT-LAJES.

No lado esquerdo da Figura 2 é notado um exemplo criado no IFESTRUT-LAJES, sendo uma laje com espessura de 3 cm, módulo de elasticidade de 210 GPa, coeficiente de Poisson igual a 0,3, simplesmente apoiada com as dimensões 2x4 (m) sujeita a uma carga uniforme de 2kN/m². Com esses dados de entrada e valores ~~finais~~ de  $m, n = 15$ , o módulo de Navier do IFESTRUT-LAJES gerou o diagrama de deslocamento apresentado à direita na Figura 2. Da mesma forma, na Figura 3 é possível observar os diagramas dos momentos fletores, no lado esquerdo tem-se momento na direção x e do lado direito o momento na direção y. Para efeito de comparação, o mesmo exemplo foi lançado no software RFEM (DLUBAL, 2021) com uma malha de elementos finitos de 5x5 cm, cujos valores máximos dos esforços e deslocamentos são comparados com os de Navier na Tabela 1.

Localizar e substituir todos por "m,n = 1 a 15"

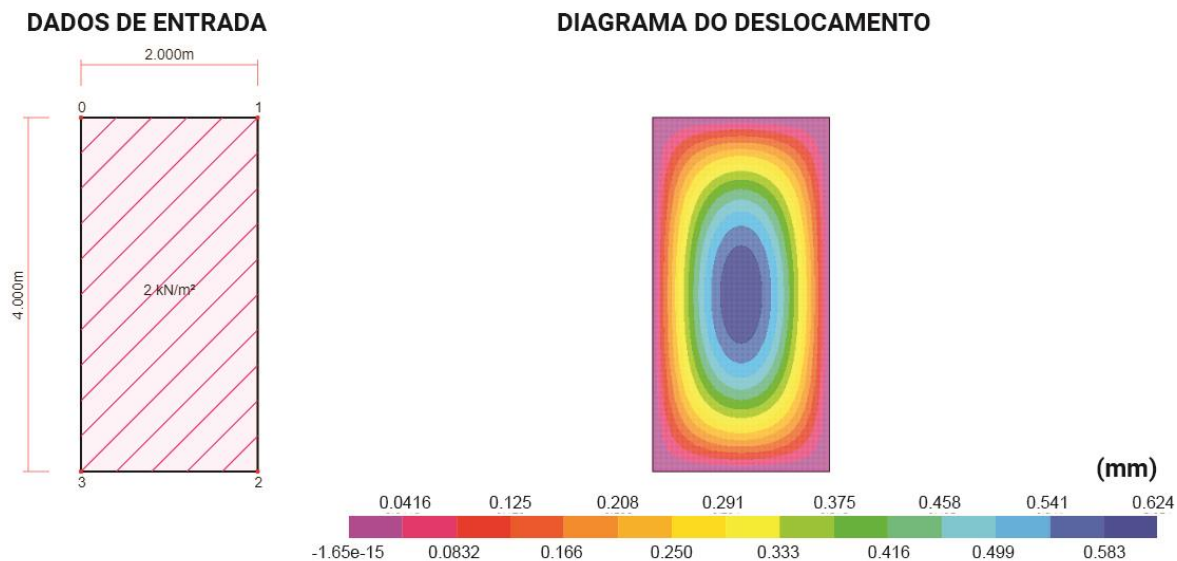


Figura 2. Dados de entrada e diagrama do deslocamento transversal gerado pelo módulo de Navier implementado no IFESTRUT-LAJES.

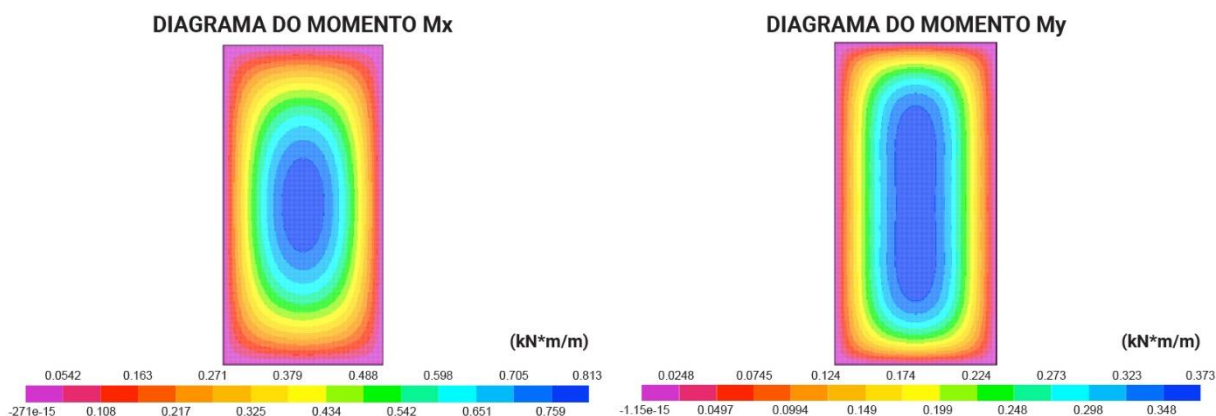


Figura 3. Diagramas dos momentos fletores, nas direções x e y, gerado pelo módulo de Navier implementado no IFESTRUT-LAJES.

Tabela 1. Comparações Navier com  $m, n = 15$  e RFEM (MEF),  $\nu = 0,3$ .

Deslocamentos e esforços	x	y	RFEM (MEF)	Navier	Diferença (%)
$w$ (mm)	1,000	2,000	0,62425	0,62422	0,0048
$Mx$ (kN * m/m)	1,000	2,000	0,81342	0,81320	0,0271
$My$ (kN * m/m)	1,000	2,658	0,37257	0,37245	0,0322

Nota-se que, com  $m, n = 15$ , os valores de Navier são semelhantes aos valores de deslocamento e momentos do RFEM (DLUBAL, 2021). Ressalta-se que o programa calcula e mostra também os diagramas do momento torçor ( $M_{xy}$ ) e cortante em x ( $Q_x$ ) e y ( $Q_y$ ).

Na Figura 4 pode ser observado parte do relatório gerado pelo IFESTRUT-LAJES de acordo com os dados de entrada do usuário. No exemplo, o algoritmo identificou que havia uma carga sobre toda laje e mostrou os passos para se chegar na função do deslocamento para essa carga. O relatório mostra uma breve teoria e as equações envolvidas nos cálculos, bem como os diagramas dos deslocamentos e esforços.

Substituindo (3) em (2), temos que :

$$p_{mn} = \frac{16q_o}{\pi^2 mn} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (1), obtemos a função algébrica do deslocamento de uma laje simplesmente apoiada sujeita a uma carga distribuída uniformemente:

$$w(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (5)$$

Em que:

$w \rightarrow$  função do deslocamento transversal da placa;

$D \rightarrow$  rigidez da placa;

$h \rightarrow$  espessura da placa;

$\nu \rightarrow$  coeficiente de Poisson;

$p(x, y) \rightarrow$  função da carga sobre a placa.

Figura 4. Parte do relatório gerado no IFESTRUT-LAJES.

## CONCLUSÕES

Tendo em vista que os resultados obtidos por meio das funções algébricas de Navier em geral são satisfatórios, o programa poderá ser utilizado por alunos, professores, bem como qualquer outro usuário interessado. O maior foco é disponibilizar os relatórios, que auxiliam os usuários com a exibição dos cálculos, de modo que tanto alunos possam utilizá-lo como material de estudo quanto professores como elemento auxiliador na metodologia de ensino.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia pela oportunidade de realizar as atividades descritas nesse artigo no ano de 2021, por meio do programa PIBIFSP.

## REFERÊNCIAS

DIAS, Nickolas Leitão. **A Teoria da Flexão de Placas Envolvendo a Equação Diferencial de Lagrange**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática Aplicada Bacharelado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande, 2019. Disponível em: [https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica\\_aplicada/2019/2019-2\\_Nickolas\\_Leitao\\_Dias.pdf](https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica_aplicada/2019/2019-2_Nickolas_Leitao_Dias.pdf). Acesso em: 28 set. 2021.

DLUBAL (Alemanha). **RFEM**: Programa estrutural de MEF para uso profissional. Versão 5.25.02. Tiefenbach, 2021. Disponível em: <https://www.dlubal.com/en/products/rfem-fea-software/what-is-rfem>. Acesso em: 28 set. 2021.

PAMPUCH, Bartek; M., Libor. **PDFMake**: Client/server side PDF printing in pure JavaScript. Versão 0.1.6.8. [S. l.], 20 jul. 2020. Disponível em: <http://www.pdfmake.org>. Acesso em: 28 set. 2021.

SZILARD, Rudolph. **Theories and Applications of Plate Analysis**: classical, numerical and engineering methods. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.

TIMOSHENKO, S. **History of strength of materials**: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. Nova York: McGraw-Hill, 1953. Reimpressão, Nova York: Dover, 1983.